

Prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě

.....
podpis studenta

Prohlašuji, že

- byl jsem seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména §35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a §60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k prezenčnímu nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o bakalářské práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu §12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněná v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů.
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě :

.....

ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

DO, T, G. Příhradové konstrukce řešené pomocí MKP. Ostrava: Katedra pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní, VŠB-Technická univerzita Ostrava, 2009, 33s. Bakalářská práce, vedoucí Fusek, M.

Cílem bakalářská práce bylo vytvoření programu pro řešení příhradových konstrukcí pomocí metody konečných prvků. Práce seznamuje s teorií příhradových konstrukcí. Rovněž je v práci popsána základní teorie metody konečných prvků.

Na základě teorie byl vytvořen vlastní program v matematickém programu MATLAB, pro analýzu rovinných příhradových konstrukcí. Pro vytvoření konečno-prvkové sítě byl použit program ANSYS.

Program je otestován na příkladu a výsledky jsou srovnány s analytickým řešením.

ANNOTATION OF THESIS

DO, T, G. Trusses Solved by FEM. Ostrava: Department of Mechanics of Materials, Faculty of Mechanical Engineering, VŠB – Technical University of Ostrava, 2009, 33 p. Thesis, head: Fusek, M.

Aim of the baccalaureate work was create computing program solution trusses using the finite element method. Working with the theory of trusses. It is also at work described the basic theory of finite element methods.

On the basis of the theory was created its own program in the mathematical program MATLAB, for analysis of trusses. To create a final element network was used program ANSYS.

The program is tested on the example and the results are compared with analytical solutions.

Obsah bakalářské práce:

1. Úvodní část	5
1.1 Seznam použitých značek	5
1.2 Úvod	6
2. Příhradová konstrukce	6
2.1 Základní pojmy a definice	6
2.2 Kontrola vnitřní a vnější statické určitosti	7
2.2.1 Kontrola statické určitosti vnější	7
2.2.2 Kontrola vnitřní statické určitosti	7
2.3 Skladba rovinného kloubového příhradového nosníku	8
2.4 Staticky neurčité rovinné kloubové příhradové nosníky	9
2.5 Příklad příhradové konstrukce	10
3. Metoda konečných prvků	11
3.1 Historie vzniku metody konečných prvků	11
3.2 Odvození základních rovnic MKP	12
3.2.1 Podstata metody konečných prvků	12
3.2.2 Postup řešení metodou konečných prvků	13
3.2.3 Lagrangeův princip virtuálních posunutí	14
3.2.4 Aplikace variačních principů při řešení prutových soustav	16
4. Aplikace na příkladu	22
4.1 Zadání	22
4.2 Analytické řešení	22
4.2.1 Kontrola statické určitosti	23
4.2.2 Uvolnění a sestavení rovnovážných rovnic pro celou konstrukci	23
4.2.3 Uvolnění jednotlivých uzlů a sestavení rovnovážných rovnic	24
4.2.4 Výsledky analytického řešení	27
4.3 Řešení pomocí MKP	28
4.3.1 Tvoření MKP geometrického modelu	28
4.3.2 Postup řešení a soubory	31
4.3.3 Výsledky numerického řešení	32
5. Závěr	33
Požítá literatura	34
Přílohy	35

1. Úvodní část

1.1. Seznam použitých značek:

<u>symbol</u>	<u>jednotka</u>	<u>definice</u>
a_1	-	Počet dvojnásobných vazeb
a_2	-	Poloměr roztečné kružnice pastorku
a_3	-	Počet trojnásobných vazeb
b	-	Počet styčníků
E	MPa	Modul pružnosti v tahu
F	N	Síla
k_n	-	Počet vnitřních kloubů
l	mm	Délka prutu
m	-	Počet vnějších reakcí odebraných vazbami
p	-	Počet prutů
R	N	Síla v prutech
r	mm	Deformace
s	-	Počet styčníků
S	mm ²	Průřez
S_p	mm ²	Povrch
T	N	Síla reakce v bodu A, B
V	mm ³	Objem
$[A]$	-	Matice relací mezi vektor prodloužení prutů a vektor posuvů uzlů
$[C]$	mm. N ⁻¹	Matice tuhosti
$[\kappa]$	mm. N ⁻¹	Diagonální matice
$[K]$	mm. N ⁻¹	Matice tuhosti
$\{P_p\}$	N	Povrchové síly
$\{r\}$	mm	Vektor posuvů uzlů
$\{u\}$	mm	složky posunutí
$\{X\}$	N	Objemové síly
$\{\Delta\}$	mm	Vektor prodloužení prutů
$\delta\{u\}$	mm	virtuální posun
ε	-	Deformace
σ	MPa	Napětí

1.2. Úvod

Cílem bakalářské práce bylo vytvoření programu pro řešení příhradových konstrukcí pomocí metody konečných prvků. Práce seznamuje s teorií příhradových konstrukcí. Rovněž je v práci popsána základní teorie metody konečných prvků.

Na základě teorie byl vytvořen vlastní program v matematickém programu MATLAB, pro analýzu rovinných příhradových konstrukcí. Pro vytvoření konečno-prvkové sítě byl použit program ANSYS.

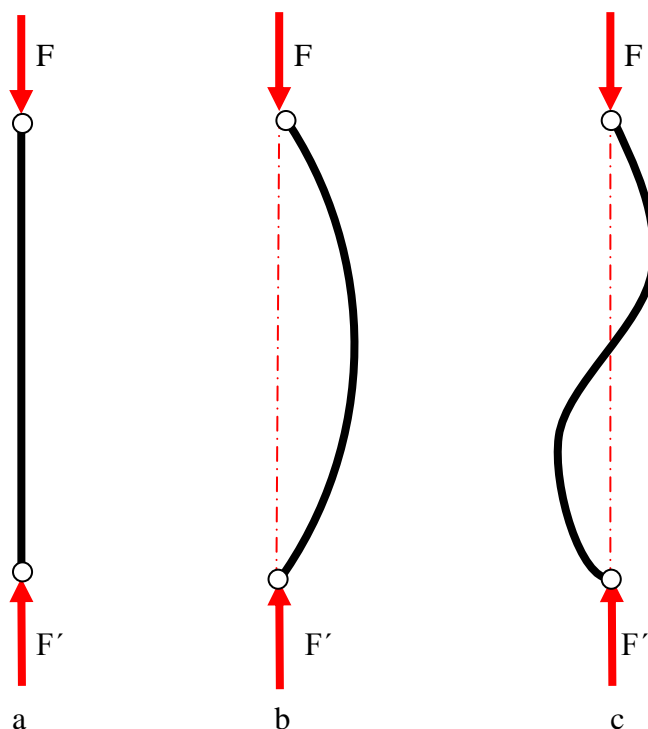
Program je otestován na příkladu a výsledky jsou srovnány s analytickým řešením.

2. Příhradové konstrukce

2.1. Základní pojmy a definice

Příhradová konstrukce je soustava, která je tvořena výhradně pruty. Prut je strojní součást, jejíž délkový rozměr převládá nad průřezovými rozměry. Materiály prutových konstrukcí mohou být různé: ocel, beton, dřevo. Jde o konstrukce využívané ve všech oblastech lidské činnosti. Pruty jsou k ostatním prutům vázány výhradně kloubovými vazbami. Klouby jsou idealizované, nepředpokládá se pasivní odpor.

Pruty jsou zatíženy výhradně ve styčnicích (kloubová spojení jednotlivých prutů). U přímých prutů to znamená, že přenášejí jen osové síly (var. A, na Obr. 2.1). Při splnění těchto předpokladů přenášejí křivé pruty jen síly ve směru spojnice kloubů (var. B, var. C na Obr. 2.1)



Obr. 2.1 Zatíženy výhradně ve styčnicích

Těžišťové osy jednotlivých prutů se ve styčníku sbíhají v jednom bodě.

Skutečné konstrukce nevyhovují nikdy těmto předpokladům. Styčníky (spojení prutů) je provedeno svařením, nýtováním, lepením apod. Pruty mají vlastní tíhu, která je vlastně zatížením po délce prutu apod.

Prutové soustavy mohou být staticky určité či neurčité a může se jednat o statickou určitost či neurčitost vnitřní nebo vnější.

Příhradová rovinná konstrukce vznikne kloubovým spojením konců přímých prutů. Osy všech prutů, vazby i zatížení leží ve svislé souřadnicové rovině xz . V prutech pak vznikají jen normálové (osové) síly. Pruty jsou tedy namáhány na tah nebo na tlak.

Základní skladebný prvek rovinné příhradové konstrukce je tzv. příhrada. Příhrada vznikne spojením tří prutů kloubu ve třech vrcholech trojúhelníku.

2.2. Kontrola vnitřní a vnější statické určitost

2.2.1. Kontrola statické určitost vnější

Těleso v rovině má 3 stupně volnosti

$$n = 3 - m \quad (2.1)$$

kde:

n ... počet stupňů volnosti, které tělesu zůstane,

m ... počet stupňů volnosti odebraných vazbami,

Pokud $n < 0$ soustava je staticky neurčitá,

Pokud $n = 0$ soustava je staticky určitá,

Pokud $n > 0$ soustava je staticky přeúčtitá. Jde o mechanismus.

2.2.2. Kontrola vnitřní statické určitosti

Po kontrole vnější statické určitosti či neurčitosti bude provedena kontrola vnitřní statické určitosti.

$$n = 2 \cdot s - p - m \quad (2.2)$$

kde:

s ... počet styčniců,

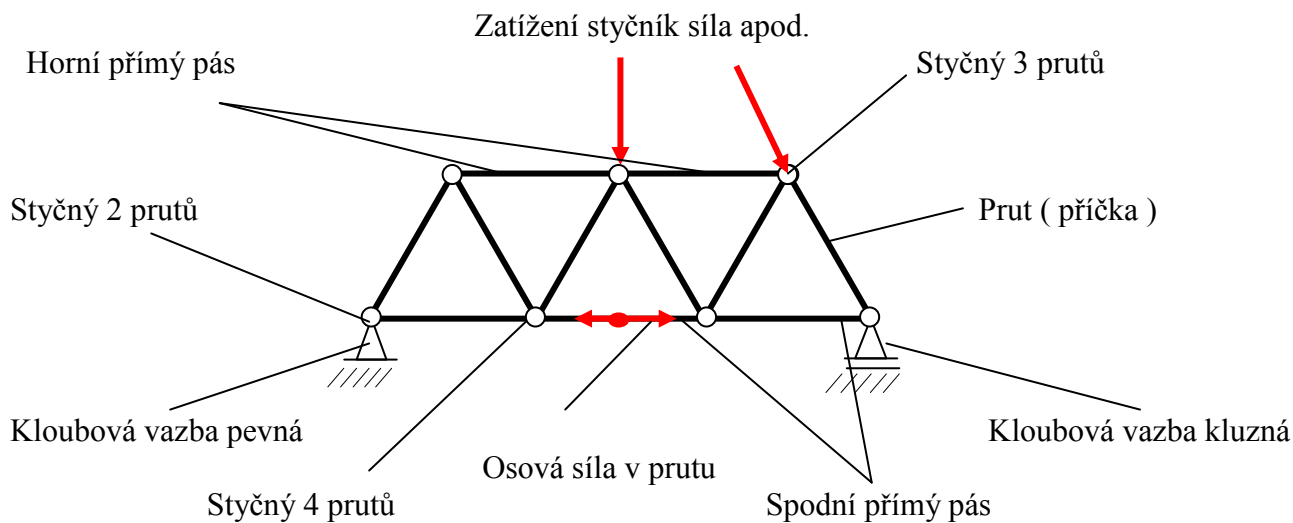
p ... počet prutů,

m ... počet vnějších reakcí odebraných vazbami.

Pokud $n = 0$, jde o soustavu vnitřně staticky určitou.

Pokud $n \neq 0$, jde o soustavu vnitřně staticky neurčitou a n je stupeň statické neurčitosti.

2.3. Skladba příhradového nosníku



Obr. 2.2 Skladba příhradového nosníku

Kontrola nehybnosti prutové soustavy.

$$2 \cdot b + 3 \cdot p = a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + 2 \cdot \sum_{n=3,4,\dots} (n-1) \cdot k_n \quad (2.3)$$

Levá část rovnice je počet statických podmínek rovnováhy, počet stupňů volnosti n .

Pravá část rovnice je počet vnějších a vnitřních vazeb v .

b ... počet styčníků

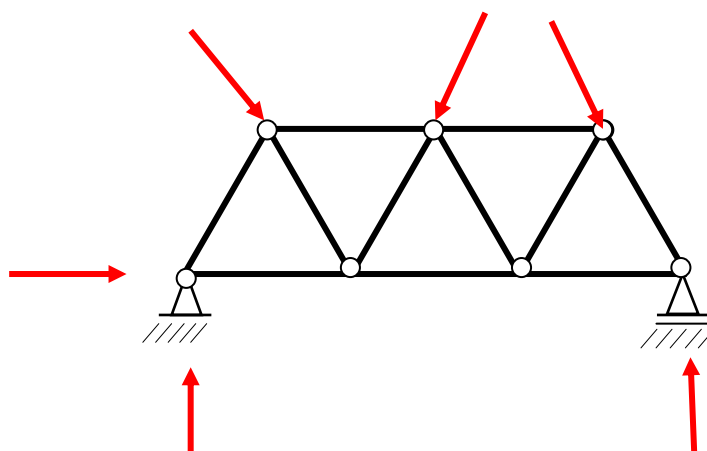
p ... počet prutů

a_1 ... počet jednonásobných vazeb

a_2 ... počet dvojnásobných vazeb

a_3 ... počet trojnásobných vazeb

k_n počet vnitřních kloubů, spojujících $n > 2$ tuhých prutů



Obr. 2.3 Kontrola nehybnosti prutové soustavy

$$2.s = p + a_1 + 2. a_2 = 14 \quad (2.3)$$

$S = 7$ počet styčníků (v každém z nich 2 podmínky rovnováhy)

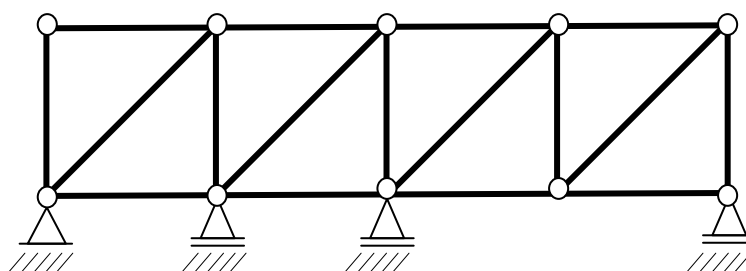
$P=11$ počet vnitřních prutů (v každém z nich 1 neznámá osová síla)

a_1 = počet jedno nebo dvojnásobných vazeb

a_2 = (1 nebo 2 neznámé složky reakcí)

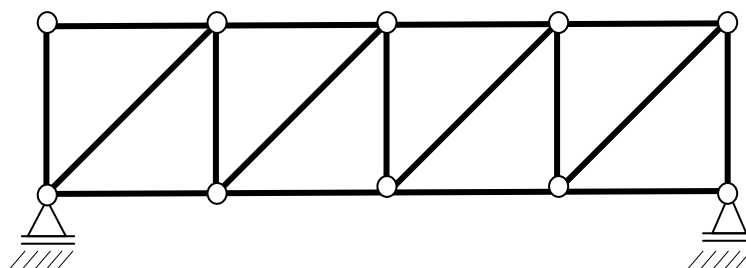
2.4. Staticky neurčitý příhradový konstrukce

- a) Nosník tvarově neurčitý a zároveň vnitřně staticky neurčitý $n = 3 - m < 0$



Obr. 2.4 Staticky neurčitý příhradový nosník.

- b) Nosník tvarově přeurečtý a zároveň vnitřně staticky neurčitý $n = 3 - m > 0$

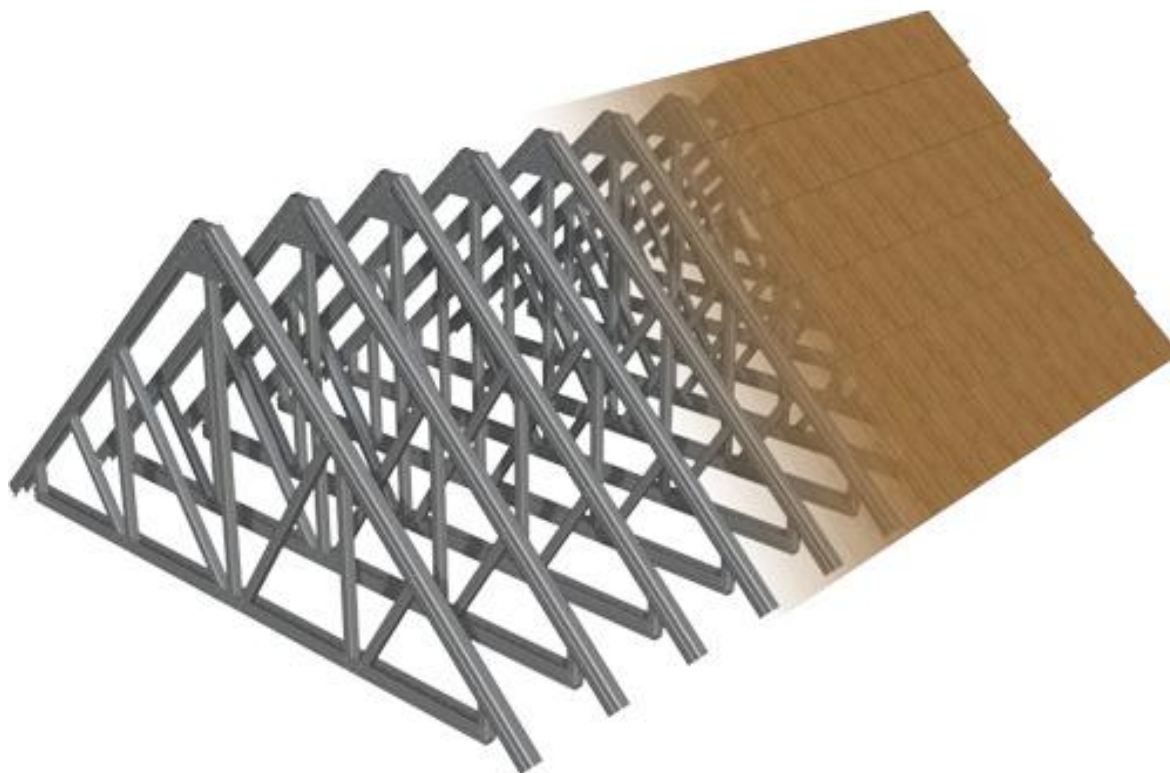


Obr. 2.5 Staticky přeurečtý příhradový nosník.

2.5. Příklady příhradových konstrukcí



Obr. 2.6 Příklad mostní konstrukce



Obr. 2.7 Příklad střešní konstrukce

3. Metoda konečných prvků

3.1. Historie vzniku metody konečných prvků

Maticové metody strukturální analýzy se začaly rozumět na konci čtyřicátých a počátku padesátých let tohoto století při řešení strukturních konstrukcí zvláště v letectví. Hlavní důvod byl počátek rozvoj výpočetní techniky, která výrazně urychlil výpočty. První počítač ENIAC byl vyvinut v roce 1946. Tento počítač měl 19000 elektronek, avšak malou paměť. Podle literárních údajů z této doby vážil 30 tun, zaujímal asi 110 m^3 prostoru a jeho příkon byl 140kW. Pro chlazení spotřeboval denně několik tun ledu. Je nutno si také dále uvědomit, že když v roce 1969 přistávala posádka Apolla 11 na Měsíc, musel Neil Armstrong převzít ve výšce 100 m nad povrchem řízení, protože palubní počítač manévry nezvládl. Dnes by byl řídicí počítač OREL s pamětí 74 kilobajtů považován za dětskou hračku (v podstatě za programovatelnou kalkulačku). Je nutno zdůraznit, že počítače s podobnými fyzickými rozměry (60x30x15cm), ale s nesrovnatelně vyšším výkonem a mnohonásobně vyšší pamětí patří nyní do běžné výbavy inženýra. dokonce i běžně domácnosti disponují takovými počítači, a tudíž mění jeho styl práce. Z toho vyplývá změna stylu práce Inženýra.

Základní idea metody konečných prvků vznikla při řešení rozsáhlých rámových konstrukcí. V roce 1941 Hrenikoff provedl pomocí tzv. "Frame work method" řešením problému elasticity. Obvykle je však vznik metody konečných prvků připisován matematikovi Courantovi, který v roce 1943 publikoval práci zabývající se problémem torze a v ní nastínil matematický postup, který se stal základem metody konečných prvků. Rozdíl mezi jeho koncepcí a koncepcí metody konečných prvků byl v tom, že Courant užíval konečné difference. O další rozvoj této myšlenky a uplatnění v technické praxi se zasloužili hlavně inženýři, kteří ji aplikovali při řešení statických a dynamických úloh. V roce 1956 Turner a kol. provedl analýzu rovinné úlohy pomocí rozkladu na prvky trojúhelníkového tvaru s třemi uzly. V šedesátých letech s rozvojem počítačových technologií byly pak provedeny analýzy značného množství prvků.

Inženýrské pojetí metody konečných prvků bylo později prohloubeno především po matematické stránce. V roce 1985 Melosh dokazuje, že metoda konečných prvků je moderní variantou klasické Ritzovy metody a lze ji řešit jiné fyzikální problémy. Velmi významným přínosem v oblasti aplikace byly práce Zienkiewicze, Cheunga, později pak Fellipa, Ironse, Marcal, Odena, Veubeke, z Českých autorů pak např. Koláře, Kratochvíla, Zlámala a Ženíška. K rozvoji metody konečných prvků ve strojírenství u nás významně přispěli Höschl, Ondráček a pracovníci SVUŠS v Běchovicích.

Literatura zabývající se teorií a aplikací metody konečných prvků je velmi rozsáhlá a použití velmi široké. Velmi časté je její použití při řešení problémů mechaniky deformovatelných těles. V současné době se řeší úlohy statiky a dynamiky konstrukcí s aplikací téměř ve všech odvětvích průmyslu, jako např. ve strojírenství, stavebnictví, v leteckém a lodním průmyslu, v energetice aj. Kromě toho jsou řešeny pomocí metody konečných prvků problémy proudění, magnetických polí, ale také úlohy biomechaniky jako např. proudění krve v komorách srdce, pevnostní problémy lidské kosti, či dentálních náhrad aj. největší rozmach metoda dosáhla po roce 1970, který je brán jako přelomový rok. V tomto roce INTEL vyvinul první mikroprocesor.

Metoda konečných prvků se v současné době v procesu projektování stává velmi významným prostředkem pro numerickou analýzu mechanických vlastností konstrukce. Stává se řádovou službou s programovým prostředím, které je velice výkonné a pro vyškolenou obsluhu bezpečné. Z jakého hlediska proudění-metoda konečných objemů.

Klíčovým krokem metody konečných prvků je sestavení soustavy lineárních algebraických rovnic, které je řízeno strukturou (modelem), která je vytvořena z tělesa jeho rozkladem na prvky vyplňující celý jeho objem. Postup výpočtu mechanických charakteristik má u všech prvků stejný jednoduchý předpis. Úlohou uživatele je v zásadě jen vytvoření sítě prvků a i tento krok z velké části automaticky zvládne počítač. Z matematického hlediska je tvorba sítě rovnocenná návrhu bazových funkcí klasických variačních metod. Síť je však třeba konstruovat pro každé těleso individuálně.

Moderní programy aplikující MKP v mechanice jsou budovány jako expertní systémy, které si samy vytvářejí modely, vybírají vhodné schéma výpočtu a podrobují své výsledky analýze přesnosti. Problémy Apolla 11 dokumentují, že programy s prvky inteligence a optimalizace jsou i při maximálním úsilí tvůrců náchylné k chybám (programátorský folklór praví, že každý program lze zkrátit na jediný příkaz, který je chybný). Jedinou možností, jak nalézt výpočtovou chybu je kritický rozbor výsledků, což vyžaduje, aby uživatel znal fyzikální podstatu analyzovaných jevů a principy použité metody.

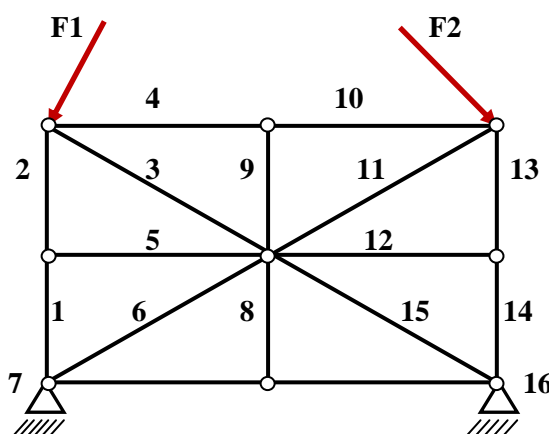
3.2. Odvození základních rovnic MKP

3.2.1. Podstata metody konečných prvků

Výpočtový model konstrukce se vytvoří tak, že se konstrukce rozloží na menší prvky (fiktivní, nazývané konečné prvky), jejichž analýza je poměrně snadná a pro většinu částí stejná.

Je však nutno formulovat podmínky, které zajišťují potřebnou interakci těchto „konečných prvků“ konstrukce tak, aby vytvořily souvislý celek, tady aby byla zajištěna rovnováha a kompatibilita konstrukce. Z těchto podmínek se vypočítají neznámé sílové nebo deformační faktory, nejprve na hranicích jednotlivých prvků, posléze i uvnitř.

Tento algoritmus analýzy je velmi dobře propracován pro prutové systémy. Prvkem je zde prut, tedy jednorozměrný útvar. Z definice příhradových konstrukcí vyplývá, že prut se může stýkat s ostatními pruty pouze v bodech-styčnicích. Takže jeden prvek může mít pouze dva stykové body.



Obr. 3.1 Soustava pruty

Metodou konečných prvků lze však řešit i dvoj a trojrozměrné modely. Kontinuum se člení na prvky konečných rozměrů, o nichž se však předpokládá, že souvisejí s ostatními pouze v bodech – v uzlech. Potom je počet prvků i počet uzlů bodů konečný. Oproti prutovým systémům je zde však důležitý rozdíl v tom, že vícedimenzionální prvky se spolu navzájem stýkají ve stykových hraních,

případně plochách. Předpoklad bodové souvislosti zde vyvolává nutné nové problémy s dislokacemi podél stykových hran prvků.

U jednorozměrných prvků lze snadno formulovat vztahy mezi silami a posuvy, lze snadno stanovit matici tuhosti. U vícerozměrného prvku nelze matici tuhosti odvodit exaktně, lze to jen nepřímou tak, že se zvolí pro silové složky (u silové varianty) nebo pro složky posunu (u deformační varianty) náhradní funkce a požaduje se, aby na okrajích prvku měly tyto funkce hodnoty, které by alespoň přibližně odpovídaly silám nebo posunutím sousedních prvků. Vhodnost náhradních funkcí je rozhodující pro přesnost numerického řešení.

Odvození matic tuhosti pro různé typy prvků lze nalézt v odborné literatuře, např. [1].

3.2.2. Postup řešení metodou konečných prvků

Při řešení metodou konečných prvků lze rozeznat šest fází:

1) Rozdělení kontinua na prvky

Pro vytvoření sítě můžeme použít různé typy prvků. Prvky mohou být jedno-, dvou- a třídímní, popřípadě můžeme použít i speciální typy prvků (např. prvky typu hmotný bod, tlumič, aj.). Pro rovinné úlohy se používají prvky ve tvaru trojúhelníku a čtyřúhelníku. Pro vytvoření sítě prostorových těles lze použít čtyřstěny, klíny a krychle.

2) Stanovení poddajnosti resp. tuhosti prvků - analýza prvku

Každý prvek vzdoruje deformaci podle svých geometrických - fyzikálních vlastností. Mírou této schopnosti je matice tuhosti, případně matice poddajnosti odvození těchto matic je základním kamenem celé analýzy MKP

3) Analýza konstrukce

Analýza konstrukce jako souhrnu všech prvků je totožná se stanovením matice tuhosti či matice poddajnosti celé konstrukce. Jde v podstatě o začlenění vlivu jednoho prvku do celkové únosnosti konstrukce. Je nutno transformovat matici tuhosti prvku z lokálního do globálního souřadného systému

4) Aplikace okrajových podmínek

Statické (silové), Kinematické (geometrické)

5) Vlastní řešení

Získání primárních výsledků: u deformační varianty to jsou posuvy uzlů, u silové varianty to jsou napětí elementu.

6) Získání odvozených výsledků

Z primárních výsledků, dále počítáme: napětí, deformace...

3.2.3. Lagrangeův princip virtuálních posunutí

Těleso necht' je zatíženo objemovými silami

$$\{X\} = \{X, Y, Z\}^T, \quad (3.1)$$

povrchovými silami

$$\{P_p\} = \{P_{px}, P_{py}, P_{pz}\}^T, \quad (3.2)$$

a je namáhané složkami napětí nebo zatížení zatěžují těleso

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}\}^T, \quad (3.3)$$

Těleso je v rovnováze jako celek a podmínky rovnováhy splňuje také každá jeho část.

Účinky této soustavy se těleso deformuje, takže v každém bodě vykazuje složky posunutí.

$$\{u\} = \{u_x, u_y, u_z\}^T, \quad (3.4)$$

Složky poměrné deformace

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^T, \quad (3.5)$$

Takovému tělesu lze udělit virtuální posun

$$\delta\{u\} = \{u_x, u_y, u_z\}^T, \quad (3.6)$$

a odpovídající pole virtuální deformace

$$\delta\{\varepsilon\} = \{\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z, \delta\gamma_{xy}, \delta\gamma_{yz}, \delta\gamma_{xz}\}^T, \quad (3.7)$$

Pole virtuálního posunutí (3.6) a virtuální deformace (3.7) jsou kinematicky přípustné, to znamená, že jsou splněny rovnice kompatibility a na hranici S_u i geometrické podmínky.

Pro virtuální stav platí Hookeův zákon.

$$\delta\{\sigma\} = [C] \delta\{\varepsilon\}, \quad (3.8)$$

Protože se jedná o virtuální pole napětí, vzniklé na základě zcela fiktivního virtuálního pole deformace, nemusí virtuální pole napětí splňovat podmínky rovnováhy. Podmínky rovnováhy musí však být splněny pro skutečný stav zatížení $\{X\}$ a $\{p\}$.

Objemové síly působí na objem V a povrchové síly působí na povrchu S_p

Princip virtuálních posunutí lze potom zapsat rovnicí

$$\iiint_{V_p} \delta\{u\}^T \{X\} dV + \iint_{S_p} \delta\{u\}^T \{p\} dS = \iiint_V \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (3.9)$$

Levou stranu tohoto výrazu lze porovnat s pravou stranou rovnice.

$$A = - \iiint_{(V_p)} \{u\}_p^T \{X\} dV - \iint_{(S_p)} \{u\}_p^T \{p\} dS \quad (3.10)$$

Je zřejmé, že se jedná o variaci rovnice (3.10), přičemž jsou variovány deformační veličiny, tedy

$$\iiint_{V_p} \delta \{u\}^T \{X\} dV + \iint_{S_p} \delta \{u\}^T \{p\} dS = -\delta A \quad (3.11)$$

Protože platí vztahy

$$\sigma_x = \frac{\partial \lambda(\{\varepsilon\})}{\partial \varepsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial \lambda(\{\varepsilon\})}{\partial \varepsilon_y}, \dots, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \lambda(\{\varepsilon\})}{\partial \tau_{yz}}. \quad (3.12)$$

nebo

$$\frac{\partial \lambda(\{\varepsilon\})}{\partial \varepsilon} = [C]\{\varepsilon\} = \{\sigma\} \quad (3.13)$$

je možno pravou stranu (3.9) zapsat ve tvaru

$$\iiint_V \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \iiint_V \delta \{\varepsilon\}^T \left(\frac{\partial \lambda(\{\varepsilon\})}{\partial \{\varepsilon\}} \right) dV = \iiint_V \delta \lambda(\{\varepsilon\}) dV = \delta U \quad (3.14)$$

Dosazením (3.11), (3.14) do (3.9) a po zavedení výrazu pro potenciální energii systému $\Pi = A + U$ bude

$$\delta(A) + \delta(U) = \delta(A + U) = \delta\Pi = 0 \quad (3.15)$$

a princip virtuálních posunutí lze vyjádřit větou :

Při variaci složek posunutí splňujících geometrické podmínky uvnitř i na hranicích tělesa je variace potenciální energie systému nulová.

Uvedená věta je podmínkou pro extrém potenciální energie systému. Lze ji proto formulovat následovně:

Ze všech možných deformačních stavů pružného tělesa, které neporušují jeho spojitost a respektují jeho vazby, nastane právě ten, při kterém je potenciální energie systému minimální.

Z kinematicky přípustných stavů tělesa je vybrán ten, který je skutečný. Lze tedy z tohoto principu odvodit rovnice rovnováhy.

Pomocí vztahu (3.10), v němž se položí $\delta\{u\}$ místo $\{u\}$, lze rovnici (3.9) upravit na tvar

$$\iiint_V \delta\{u\}^T ([\partial]\{\sigma\} + \{X\}) dV = - \iint_{S_u} \delta\{u\}^T (-[n]\{\sigma\} + \{p\}) dS \quad (3.16)$$

Tato rovnice může být splněna při libovolných virtuálních posunech $\delta\{u\}$ jedině tehdy, budou-li současně splněny podmínky rovnováhy. Rovnice

$$[\partial]\{\sigma\} + \{X\} = 0 \quad (3.17)$$

a

$$\{p\} = [n]\{\sigma\} \quad (3.18)$$

(3.5) jsou důsledkem principu virtuálních posunutí, a proto je tento princip nazýván obecným principem rovnováhy.

Princip virtuálních posunutí lze snadno rozšířit na dynamické úlohy. Měrné setrvačné síly lze totiž na základě d'Alembertova principu považovat za objemové síly ve tvaru $\{X\}_s = -\rho\{\ddot{u}\}$, kde $\{\ddot{u}\}$ je druhá parciální derivace funkce posuvu podle času a ρ je hustota materiálu. Levou stranu (3.24) je potom nutno zapsat ve tvaru

$$\iiint_V \delta\{u\}^T ([\partial]\{\sigma\} - \rho\{\ddot{u}\}) dV. \quad (3.19)$$

3.2.4. Aplikace variačních principů při řešení prutových soustav

Kompatibilní prodloužení prutů prutové soustavy složené z N prutů, spojených v M kloubech, lze vyjádřit pomocí posuvů uzlů rovnicí

$$\{\Delta\} = [A] \cdot \{r\}, \quad (3.20)$$

Kde $\{\Delta\}$ je vektor prodloužení prutů $\{\Delta\} = \{\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_N\}^T$, $\{r\}$ je vektor posuvů uzlů $\{r\} = \{r_1, r_2, \dots, r_{2M}\}^T$, $[A]$ je matice relací mezi $\{\Delta\}$ a $\{r\}$.

Vztah mezi silami, v prutech $\{F\} = \{F_1, F_2, \dots, F_N\}^T$ prodlouženími vyplývá z Hookeova zákona (3.13)

$$\{F\} = [\kappa] \cdot \{\Delta\}, \quad (3.21)$$

Je-li N prutů spojeno v M kloubech, má matice $[A]$ pro rovinnou úlohu rozměr $N \times 2M$ (každý uzel je třeba uvažovat z hlediska posuvu ve dvou směrech). Matice $[\kappa]$ je diagonální matice složená z prvků $\kappa_i = E_i \cdot S_i / l_i$, vyjadřujících tuhost jednotlivých prutů.

Pomocí těchto vztahů je možno vyjádřit potenciální energii deformace vnitřních sil rovnicí

$$U = \frac{1}{2} \{\Delta\}^T \{F\} = \frac{1}{2} \{r\}^T [A]^T [\kappa] [A] \{r\}. \quad (3.22)$$

Označí-li se

$$[K] = [A]^T [\kappa] [A]. \quad (3.23)$$

Bude

$$U = \frac{1}{2} \{r\}^T [K] \{r\}. \quad (3.24)$$

Práce vnějších sil plyne z rovnice

$$A = -\{r\}^T \{Q\} \quad (3.25)$$

kde $\{Q\} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{2M}\}^T$ je vektor uzlových sil.

Z Lagrangeova principu virtuálních posunutí potom plyne

$$\delta \{r\}^T \frac{\delta(U + A)}{\delta \{r\}} = \delta \{r\}^T ([K] \{r\} - \{Q\}) = 0 \quad (3.26)$$

odkud

$$[K] \{r\} = \{Q\} \quad (3.27)$$

což je základní soustava rovnic, pro řešení posunutí uzlů prutové soustavy. Matice $[K]$ se nazývá matice tuhosti a je singularní. Singularita se odstraní uvážením okrajových podmínek. Např. pro nulové předepsané posuvy v uložení plyne vektor hledaných posuvů $\{\bar{r}\}$ z rovnice

$$\{\bar{r}\} = [f] \{\bar{Q}\} \quad (3.28)$$

V rovnici (3.21) je $[f]$ inverzní matice tzv. zmenšené matice tuhosti po vypuštění řádků a sloupců příslušejících předepsaným nulovým posuvům, $\{\bar{Q}\}$ je vektor předepsaných uzlových sil.

Soustavu rovnic (3.20) lze získat také pomocí Lagrangeova principu virtuálních posuvů.

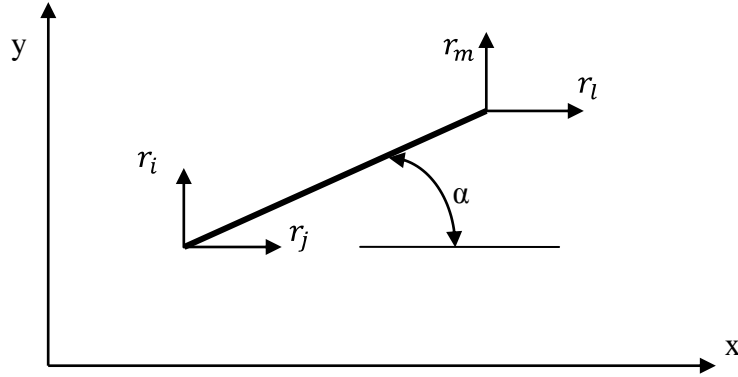
Udělí-li se soustavě virtuální posuvy, potom lze rovnost virtuální práce vnitřních a vnějších sil zapsat vztahem

$$\delta \{\Delta\}^T \{F\} = \delta \{r\}^T \{Q\} \quad (3.29)$$

Po dosazení z (3.20) a (3.21) potom bude

$$\delta\{r\}^T [A]^T [\kappa] [A] \{r\} = \delta\{r\}^T \{Q\}, \quad (3.30)$$

odkud po zkrácení $\delta\{r\}^T$ se získá (3.27), tedy $[K]\{r\} = \{Q\}$.



Obr.3.2 prut k

Relace mezi posuvy $\{r\}$ v uzlech a prodloužením l_l u jednoho prutu soustavy (např. u prutu k , obr.3.2) plyne z rovnice

$$\Delta l_k = -r_i \cos \alpha_k - r_j \sin \alpha_k + \cos \alpha_k + r_m \sin \alpha_k. \quad (3.31)$$

Jak bylo řečeno výše, je matice tuhosti $[K]$ singulární. Singularita se odstraní respektováním okrajových podmínek. Je zřejmé, že část vnějších sil $\{Q\}$ musí být silami, které působí ze základního rámu na prutovou soustavu - tedy reakcemi. Část posuvů $\{r\}$ musí být na druhé straně předepsána způsobem uložení soustavy.

Řádky a sloupce matice tuhosti lze přeskupit tak, aby byly pro vnější reakce v blocích zvlášť, aby tudíž byly odděleny i předepsané posuvy (např. číslování posuvů v uzlech se provede tak, aby všechny předepsané posuvy byly v posledních řádcích a sloupcích matice tuhosti).

Formálně lze potom soustavu rovnic (3.27) zapsat pomocí submatic

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

kde Q_1 ... je vektor zadaných vnějších zobecněných sil v uzlech,

Q_2 ... je vektor neznámých reakcí,

r_1 ... je vektor neznámých uzlových zobecněných posuvů,

r_2 ... je vektor předepsaných zobecněných posuvů, které respektují okrajové podmínky,

$K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$... jsou submatice matice tuhosti, odpovídající svými rozměry subvektorům r_1 a r_2 .

Rovnici (3.32) je možno zapsat dvěma maticovými rovnicemi, a to

$$K_{11}r_1 + K_{12}r_2 = Q_1 \quad (3.33)$$

$$K_{21}r_1 + K_{22}r_2 = Q_2 \quad (3.34)$$

Vektor neznámých posuvů lze na základě známých veličin Q_1 a r_2 stanovit z rovnice (3.33).

Bude

$$r_1 = K_{11}^{-1}\{Q_1 - K_{12}r_2\}. \quad (3.35)$$

Vektor neznámých reakcí Q_2 pak plyne z druhé rovnice, tedy z (3.34), do které se dosadí za r_1 , stanovené z rovnice (3.35).

Budou-li předepsané posuvy nulové, tedy $r_2 = \{0\}$, lze rovnici (3.33) zapsat ve tvaru

$$K_{11}r_1 = Q_1, \quad (3.36)$$

kde K_{11} je zmenšená matice tuhosti soustavy.

Reakce potom plynou z rovnice

$$K_{21}r_1 = Q_2. \quad (3.37)$$

Matici tuhosti prutové soustavy $[K]$ je možno stanovit také pomocí superpozice matic tuhosti jednotlivých prutů (prvků).

Pro libovolný samostatný prut (obr.3.7) plyne matice relací $[A_k]$ z rovnice (3.31). Bude to jednořádková matice

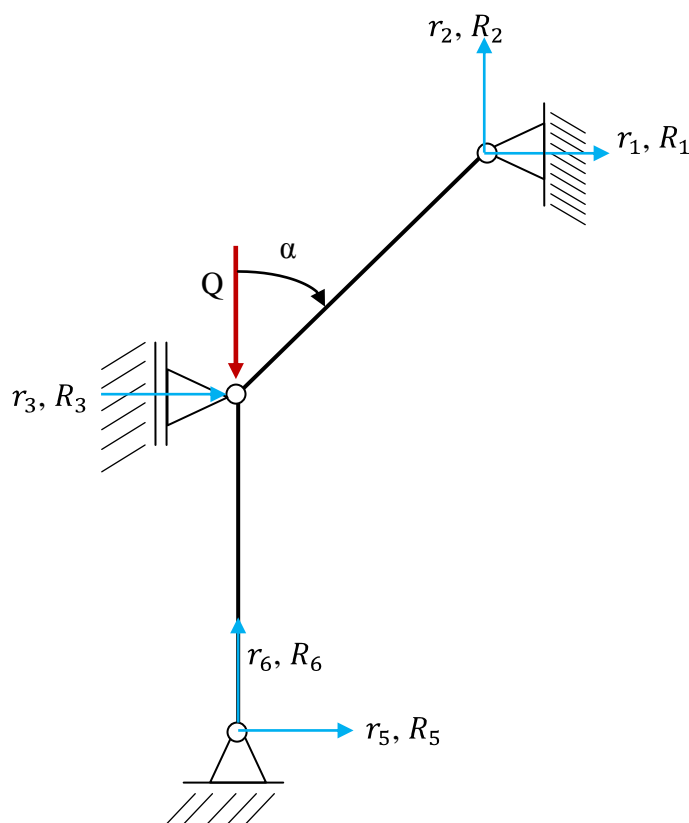
$$[A_k] = \{-c, -s, c, s\}, \text{ kde } c = \cos \alpha_k, s = \sin \alpha_k. \quad (3.38)$$

Vztah mezi silou F_k a prodloužením plyne z Hookeova zákona (3.21). Matice $[\kappa]$ bude jednoprvková a lze ji pro prut k zapsat vztahem

$$[\kappa]_k = \left[\frac{E_k S_k}{l_k} \right] = \kappa_k = \frac{E_k S_k}{l_k}. \quad (3.39)$$

Po dosazení do rovnic (3.23) z (3.38) a (3.39) a po roznásobení bude lokální matice tuhosti pro prut k

$$[\kappa]_k = \frac{E_k S_k}{l_k} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -cs & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$



Obr.3.3 Soustava dva pruty.

Globální matice celé prutové soustavy se vytvoří tak, že se prvky lokálních (elementárních) matic jednotlivých prutů sečtou pro společný uzel a směr, tedy na společné adrese určené číslem řádku a sloupce. K tomu je nutno použít průběžné číslování posuvů a sil v globální soustavě. Souvislost lokálních a globálních indexů vyplývá z dispozice prutové soustavy.

Při tomto postupu se vychází z poznatku, že reakce v kterémkoliv uzlu je dána součtem reakcí přenášených do jednotlivých prutů, které se v tomto uzlu stýkají. Tak je možno pomocí matic tuhosti jednotlivých prutů $[K]_k$ sestavit přímo matici tuhosti soustavy $[K]$. Postup je často nazýván „lokalizační tabulka“ a je demontován v následující části.

Lokalizační tabulka:

Číslo prutu	i	j	l	m
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6

$$[K]_1$$

	1	2	3	4	
$\frac{E \cdot S}{l} \begin{bmatrix} k_{1,1}^1 & k_{1,2}^1 & k_{1,3}^1 & k_{1,4}^1 \\ k_{2,1}^1 & k_{2,2}^1 & k_{2,3}^1 & k_{2,4}^1 \\ k_{3,1}^1 & k_{3,2}^1 & k_{3,3}^1 & k_{3,4}^1 \\ k_{4,1}^1 & k_{4,2}^1 & k_{4,3}^1 & k_{4,4}^1 \end{bmatrix}$	$= \frac{E \cdot S}{l} \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$			

$$[K]_2$$

	3	4	5	6	
$\frac{E \cdot S}{l} \begin{bmatrix} k_{1,1}^2 & k_{1,2}^2 & k_{1,3}^2 & k_{1,4}^2 \\ k_{2,1}^2 & k_{2,2}^2 & k_{2,3}^2 & k_{2,4}^2 \\ k_{3,1}^2 & k_{3,2}^2 & k_{3,3}^2 & k_{3,4}^2 \\ k_{4,1}^2 & k_{4,2}^2 & k_{4,3}^2 & k_{4,4}^2 \end{bmatrix}$	$= \frac{E \cdot S}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$			

	1	2	3	4	5	6	
$\frac{E \cdot S}{l}$	$k_{1,1}^1$	$k_{1,2}^1$	$k_{1,3}^1$	$k_{1,4}^1$	0	0	1
	$k_{2,1}^1$	$k_{2,2}^1$	$k_{2,3}^1$	$k_{2,4}^1$	0	0	2
	$k_{3,1}^1$	$k_{3,2}^1$	$k_{3,3}^1 + k_{1,1}^2$	$k_{3,4}^1 + k_{1,2}^2$	$k_{1,3}^2$	$k_{1,4}^2$	3
	$k_{4,1}^1$	$k_{4,2}^1$	$k_{4,3}^1 + k_{2,1}^2$	$k_{4,4}^1 + k_{2,2}^2$	$k_{2,3}^2$	$k_{2,4}^2$	4
	0	0	$k_{3,1}^2$	$k_{3,2}^2$	$k_{3,3}^2$	$k_{3,4}^2$	5
	0	0	$k_{4,1}^2$	$k_{4,2}^2$	$k_{4,3}^2$	$k_{4,4}^2$	6

$$\frac{E \cdot S}{l} \begin{bmatrix} k_{1,1}^1 & k_{1,2}^1 & k_{1,3}^1 & k_{1,4}^1 & 0 & 0 \\ k_{2,1}^1 & k_{2,2}^1 & k_{2,3}^1 & k_{2,4}^1 & 0 & 0 \\ k_{3,1}^1 & k_{3,2}^1 & k_{3,3}^1 + k_{1,1}^2 & k_{3,4}^1 + k_{1,2}^2 & k_{1,3}^2 & k_{1,4}^2 \\ k_{4,1}^1 & k_{4,2}^1 & k_{4,3}^1 + k_{2,1}^2 & k_{4,4}^1 + k_{2,2}^2 & k_{2,3}^2 & k_{2,4}^2 \\ 0 & 0 & k_{3,1}^2 & k_{3,2}^2 & k_{3,3}^2 & k_{3,4}^2 \\ 0 & 0 & k_{4,1}^2 & k_{4,2}^2 & k_{4,3}^2 & k_{4,4}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ Q \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$

Přece lokalizační tabulku, tímto jsme sestavili Globální matice tuhosti soustavy Obr. 3.3

Podobně i vnější síly, vnášené do jednotlivých prutů v uzlech soustavy se složí do výsledného vektoru $\{Q\}$ vnějších sil přenášených do celé prutové soustavy v uzlech, jejichž posuvy $\{r\}$ jsou v shodném globálním číslování. To je podstata přímé tuhostní metody (direct stiffness method).

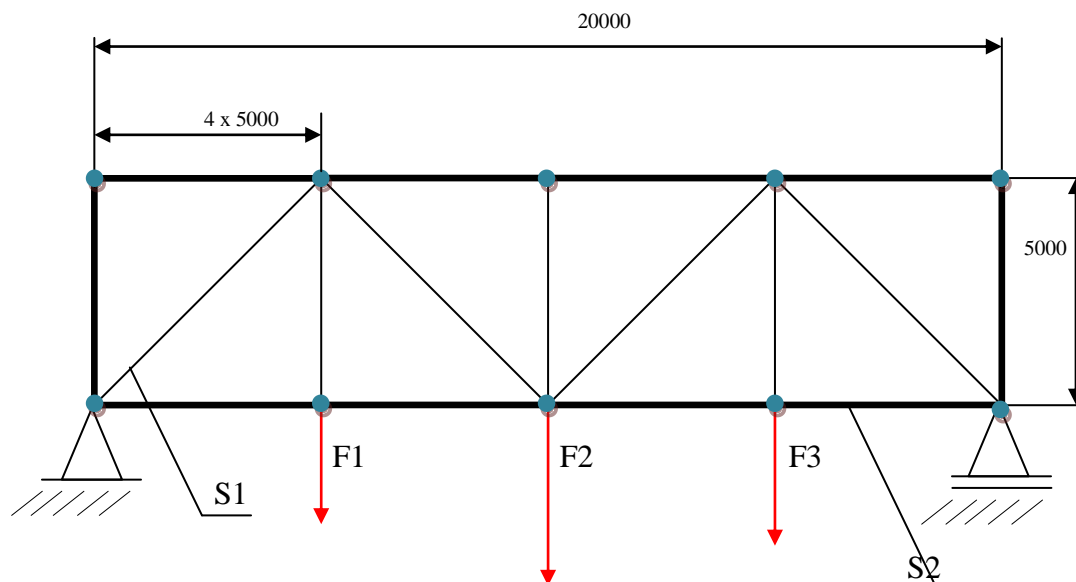
Postup je zřejmý z příkladu prutové soustavy, složené z dvěma prutů, uvedené na obr. 3.3. Jsou zadány moduly pružnosti $E_1 \div E_2$, průřezy $S_1 \div S_2$, délky prutů $l_1 \div l_2$, síly Q a úhel α .

Nezmenšená matice tuhosti prutové soustavy (globální matice) bude mít rozměr 6×6 . Lokální matice tuhosti jednotlivých prutů se stanoví podle (3.40). Ukládání prvků matic jednotlivých prutů je zřejmé. Hodnota prvku lokální matice tuhosti prvku se přičte k prvku globální matice se stejným globálním číslem. Globální čísla jednotlivých posunutí udává lokalizační tabulka (příslušná čísla u matic tuhosti vyšetřovaných prvků označují jednotlivé sloupce a řádky globální matice tuhosti).

4. Aplikační příklad

Jako aplikační příklad byl zvolen model mostní konstrukce (např. železničního mostu). Geometrické a materiálové vlastnosti jsou v kapitole 4.1. Rovněž jsou zde uvedeny okrajové podmínky.

4.1. Zadání

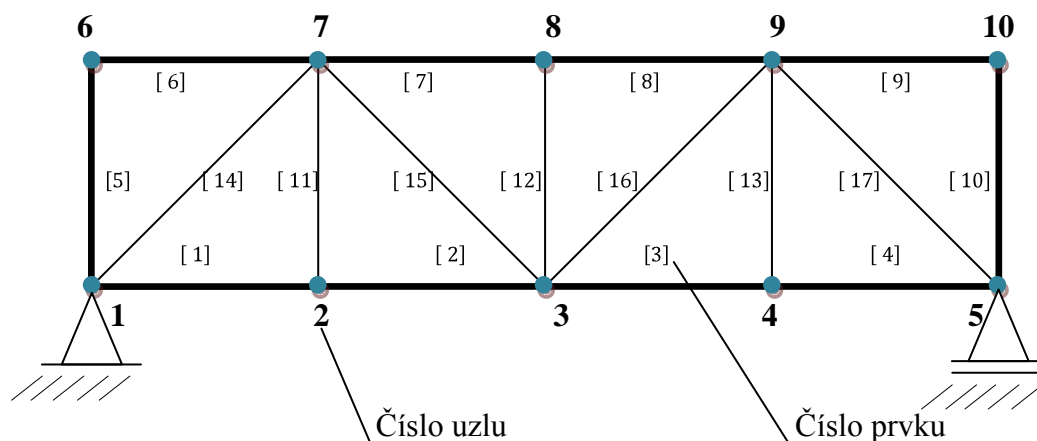


Obr. 4.2 Zadání konstrukce

Proveďte výpočet reakcí a sil v prutech u příhradové konstrukce na Obr. 4.2. Vzdálenost mezi styčníky je 5 m. Průřez tyče jsou $S1=1000\text{mm}^2$, $S2=2000\text{mm}^2$. Síly jsou zadány takto $F1=5\,000\text{N}$, $F2=15\,000\text{N}$, $F3=10\,000\text{N}$. Materiál je zadán ocel $E=210\,000\text{MPa}$, $\mu=0.3$. Průřezy jednotlivých prutů, označení styčníků je na Obr. 4.2. Styčníky odpovídají uzlům a uzly v MKP modelu, jsou označeny na Obr. 4.3. V MKP modelu odpovídají pruty elementům.

4.2. Analytické řešení

Pro řešení byla využívala tzv. Styčníková metoda.



Obr. 4.3 Schéma prvků a uzlů

4.2.1. Kontrola statické určitosti

Kontrola statické určitosti vnější

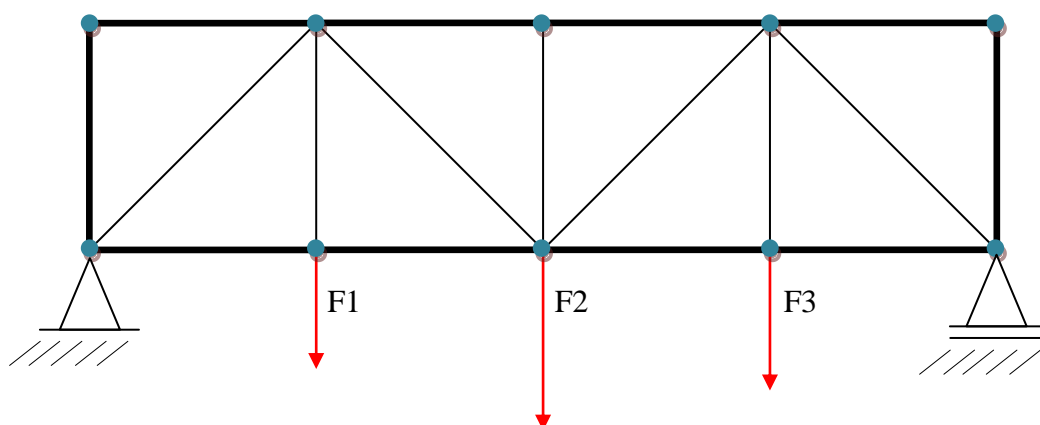
$$n = 3 - m = 3 - 3 = 0$$

Kontrola vnitřní statické určitosti

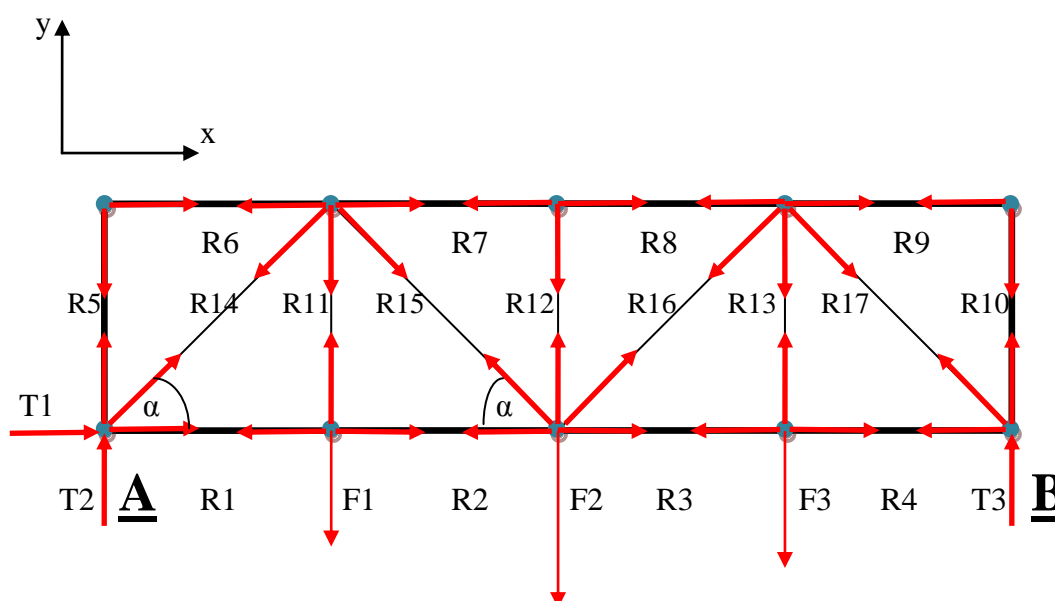
$$n = 2 \cdot s - p - m = 2 \cdot 10 - 17 - 3 = 0$$

$n = 0$, soustava je staticky určitá.

4.2.2. Uvolnění a sestavení rovnovážných rovnic pro celou konstrukci



Obr. 4.4 Schéma zadán síl



Obr. 4.5 Uvolnění sil v prutech

Výpočet jednotlivých úhlů se vychází z konstrukčních rozměrů:

$$\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{5000}{5000}\right)$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Rovnovážné rovnice:

$$\Sigma F_{ix} = 0 = T_1 \quad (4.1)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = T_2 + T_3 - F_1 - F_2 - F_3 \quad (4.2)$$

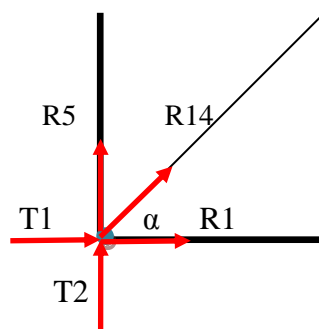
$$\Sigma M_{iA} = 0 = T_3 \cdot 20000 - F_1 \cdot 5000 - F_2 \cdot 10000 - F_3 \cdot 15000 \quad (4.3)$$

Řešením soustavy rovnic, získáme výsledky reakcí v bodu A, B

$$T_1 = 0 \text{ N}, \quad T_2 = 13750 \text{ N}, \quad T_3 = 16250 \text{ N}.$$

4.2.3. Uvolnění jednotlivých uzlů a sestavení rovnovážných rovnic

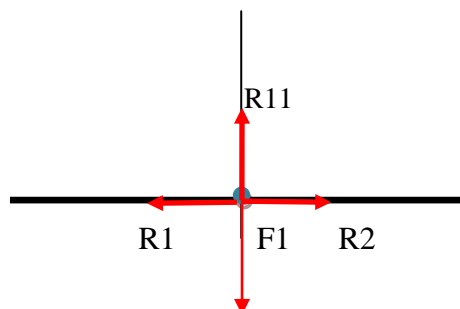
Uzel 1.



$$\Sigma F_{ix} = 0 = R_{14} \cdot \cos(\alpha) + R_1 + T_1 \quad (4.4)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = R_5 + R_{14} \cdot \sin(\alpha) + T_2 \quad (4.5)$$

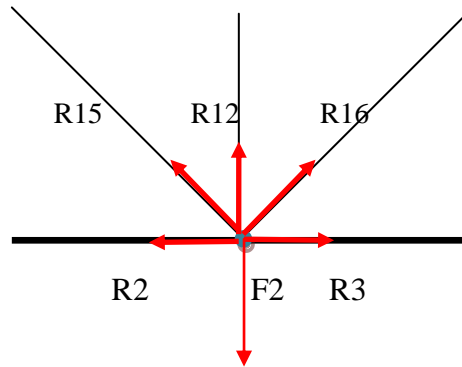
Uzel 2.



$$\Sigma F_{ix} = 0 = R_2 - R_1 \quad (4.6)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = R_{11} - F_1 \quad (4.7)$$

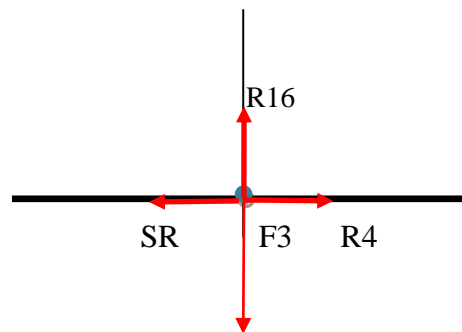
Uzel 3.



$$\Sigma F_{ix} = 0 = -R_2 - R_{15} \cdot \cos(\alpha) + R_{16} \cdot \cos(\alpha) + R_3 \quad (4.8)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = R_{12} + R_{15} \cdot \sin(\alpha) + R_{16} \cdot \sin(\alpha) - R_2 \quad (4.9)$$

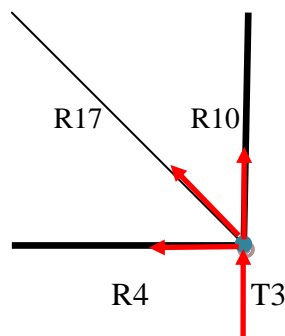
Uzel 4.



$$\Sigma F_{ix} = 0 = R_4 - R_3 \quad (4.10)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = R_{16} - F_3 \quad (4.11)$$

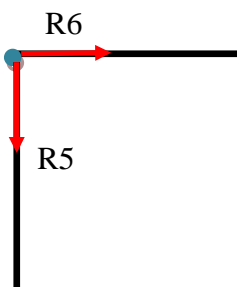
Uzel 5.



$$\Sigma F_{ix} = 0 = -R_4 - R_{17} \cdot \cos(\alpha) \quad (4.12)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = R_{10} + T_3 \quad (4.13)$$

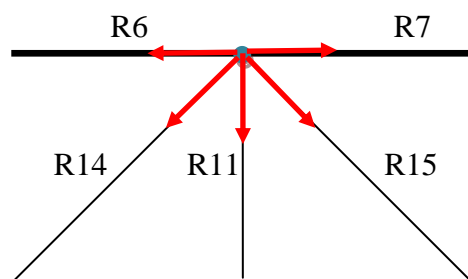
Uzel 6.



$$\Sigma F_{ix} = 0 = R6 \quad (4.14)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = -R5 \quad (4.15)$$

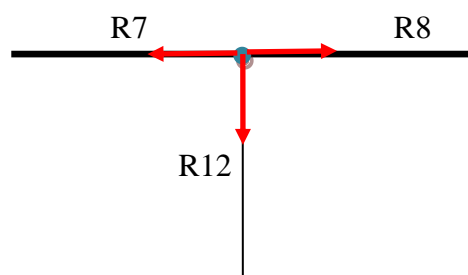
Uzel 7.



$$\Sigma F_{ix} = 0 = -R6 - R14 \cdot \cos(\alpha) + R15 \cdot \cos(\alpha) + R7 \quad (4.16)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = -R11 - R14 \cdot \sin(\alpha) - R15 \cdot \sin(\alpha) \quad (4.17)$$

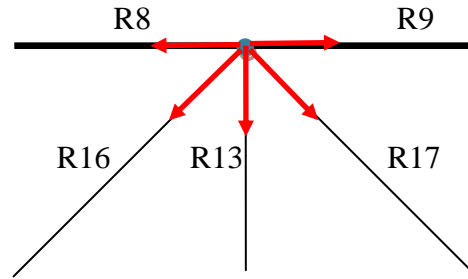
Uzel 8.



$$\Sigma F_{ix} = 0 = -R7 + R8 \quad (4.18)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = -R12 \quad (4.19)$$

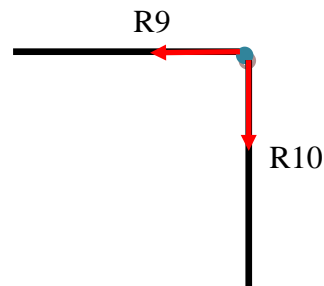
Uzel 9.



$$\Sigma F_{ix} = 0 = -R8 - R16 \cdot \cos(\alpha) + R17 \cdot \cos(\alpha) + R9 \quad (4.20)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = -R13 - R16 \cdot \sin(\alpha) - R17 \cdot \sin(\alpha) \quad (4.21)$$

Uzel 10.



$$\Sigma F_{ix} = 0 = -R9 \quad (4.22)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 = -R10 \quad (4.23)$$

4.2.4. Výsledky analytické řešení

Máme soustavu 20 rovnic o 20 neznámých. Soustava je řešitelná. Výsledky řešení této soustavy rovnic viz Tab. 1. Dále bylo dořešeno napětově-deformační chování prutové soustavy. Byly použity následující vzorec.

Posuv
$$\Delta l_i = \frac{R_i \cdot l_i}{E \cdot S_i}$$

Deformace
$$\varepsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_i}$$

Napětí
$$\sigma_i = E \cdot \varepsilon_i$$

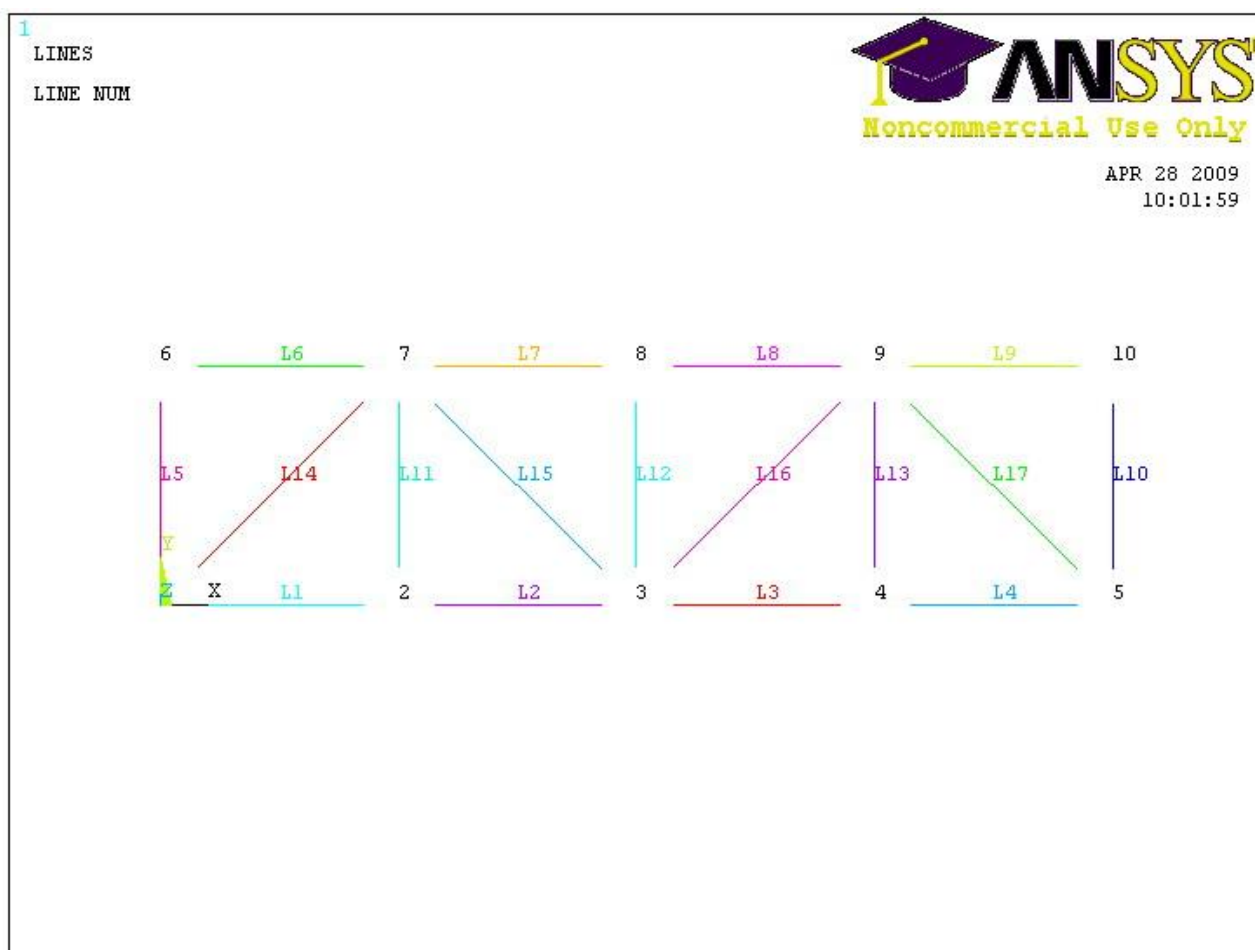
Číslo prutu	Průřez S_i	Délka prutu l_i	Síla R_i	Posuv Δl_i	Deformace ε_i	Napětí σ_i
[–]	[mm ²]	[mm]	[N]	[mm]	[–]	[MPa]
1	2000	5000	13750	0,16369048	3,27381E-05	6,875
2	2000	5000	13750	0,16369048	3,27381E-05	6,875
3	2000	5000	16250	0,19345238	3,86905E-05	8,125
4	2000	5000	16250	0,19345238	3,86905E-05	8,125
5	2000	5000	0	0	0	0
6	2000	5000	0	0	0	0
7	2000	5000	–22499	-0,2678452	-5,3569E-05	-11,2495
8	2000	5000	–22499	-0,2678452	-5,3569E-05	-11,2495
9	2000	5000	0	0	0	0
10	2000	5000	0	0	0	0
11	1000	5000	5000	0,11904762	2,38095E-05	5
12	1000	5000	0	0	0	0
13	1000	5000	10000	0,23809524	4,7619E-05	10
14	1000	7071	–19445	-0,6547409	-9,2595E-05	-19,445
15	1000	7071	12374	0,41665026	5,89238E-05	12,374
16	1000	7071	8839	0,29762176	4,20905E-05	8,839
17	1000	7071	–22981	-0,7738031	-0,00010943	-22,981

Tab. 1. Výsledky Analytické řešení

4.3. Řešení pomocí MKP

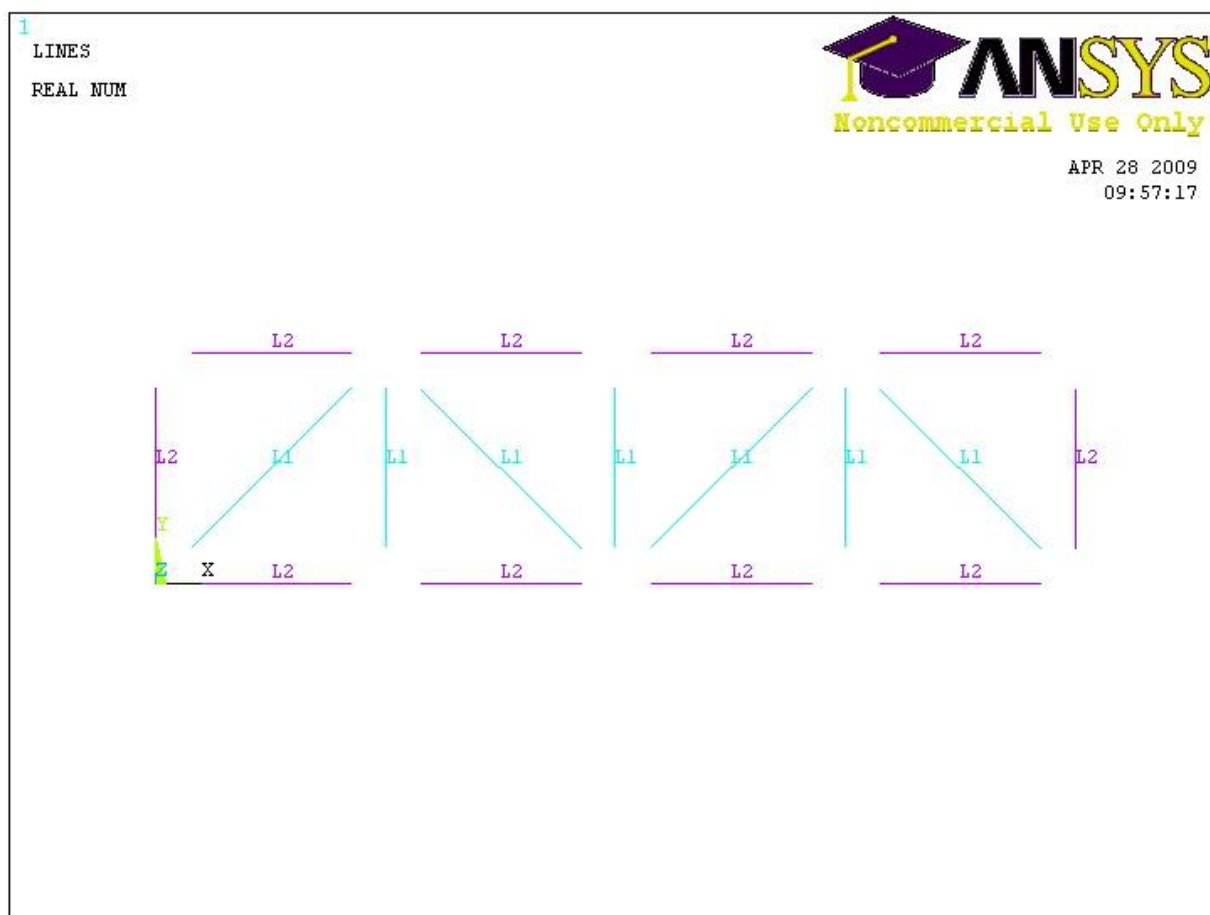
4.3.1. Tvorba MKP geometrie modelu

Pro vytvoření sítě modelu byl využit komerční program ANSYS. Z programu byly následně získány informace o poloze uzlů a umístění elementů pomocí příkazů NWRITE a EWRITE. Příkaz NWRITE zapisuje pozice uzlů do souboru „node.txt“. EWRITE zapisuje pozice elementů do souboru „element.txt“.



Obr. 4.6 Schéma uzlů a prvků v ANSYS.

Informace o průřezu jsou uloženy do tzv. reál konstant. Kde $L1=1000\text{mm}^2$, $L2=2000\text{mm}^2$.
Informace je nutná i u analytického řešení- zadání, kde průřezy byly označeny S1 ; S2



Obr. 4.7 Schéma réél konstant.

Ukázka soubor „node.txt“

1	0	0
2	5000.0000000000	0
3	10000.0000000000	0
4	15000.0000000000	0
5	20000.0000000000	0
6	0.00000000000000	5000.0000000000
7	5000.0000000000	5000.0000000000
8	10000.0000000000	5000.0000000000
9	15000.0000000000	5000.0000000000
10	20000.0000000000	5000.0000000000

První sloupec je číslo uzlů. Druhý sloupec jsou x-ové souřadnice uzlů. Třetí sloupec jsou y-ové souřadnice uzlů

Ukázka soubor „element.txt“

1	2	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	1
2	3	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	2
3	4	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	3
4	5	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	4
1	6	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	5
6	7	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	6
7	8	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	7
8	9	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	8
9	10	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	9
10	5	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	10
7	2	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	11
8	3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	12
9	4	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	13
1	7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	14
7	3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	15
3	9	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	16
9	5	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	17
I,	J,	K,	L,	M,	N,	O,	P,	MAT,	TYPE,	REAL,	SEC,	ESYS,	IEL

První dva sloupce udávají čísla uzlů mezi, kterými je prvek vytvořen. První sloupec udává číslo uzlů, který prvek začíná. Druhý sloupec udává číslo uzlů ve které prvek končí. Třetí sloupec do osmého sloupce nepoužíváme. Devátý sloupec je materiál prvků, všechny prvky mají stejný materiál ocel $E=210\,000\text{ MPa}$, $\mu=0.3$. Desátý sloupec je typ prvky, nepoužíváme. Jedenáctý sloupec je reál konstanta prvků, reál konstanta číslo 1 je Průřez $S1=1000\text{ mm}^2$ a reál konstanta číslo 2 je Průřez $S2=2000\text{ mm}^2$. Dvanáctý sloupec a třináctý sloupec jsou reální konstanty nepoužíváme. Poslední sloupec je číslo prvků.

4.3.2. Postup řešení a soubory

Pro vlastní řešení daného problému, byl vytvořen vlastní program v matematickém programu MATLAB, blíže viz [S1].

Program se skládá z hlavního program a několika podprogramů.

Hlavní program - Hlavni.m.

Podprogramy - hledatprurez.m, maticetuhosti.m, reseniposuvy.m, reseninapeti.m, resenireakce.m, graf.m

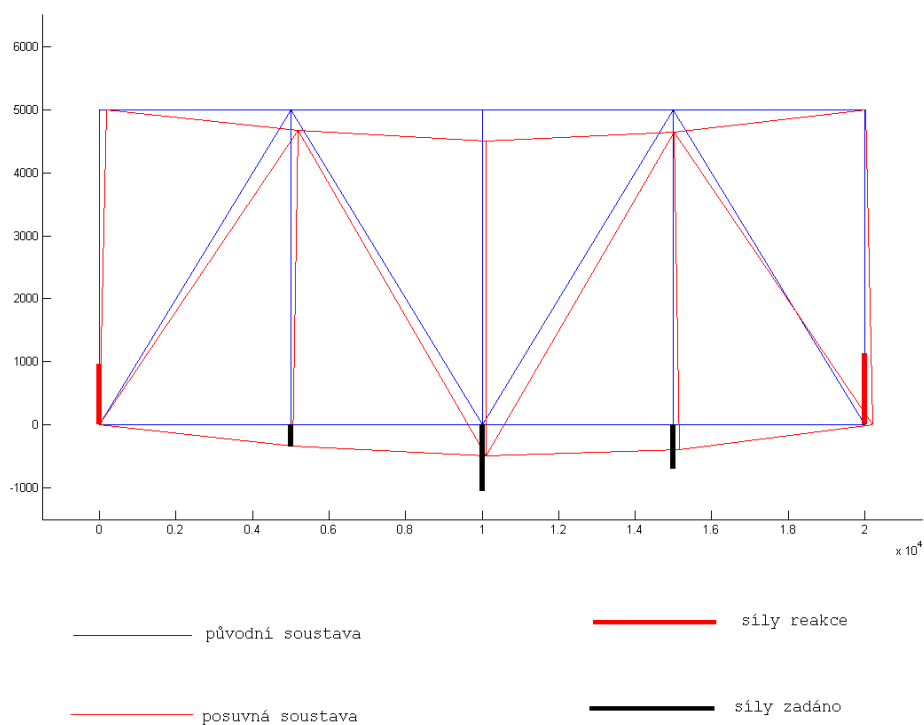
Všechny programy jsou umístěny v přílohách ... a dále jsou také umístěny na příložením CD.

4.3.3. Výsledky řešení pomocí MKP

Primární výsledky řešení jsou v Tab. 2. Grafické zobrazení výsledků deformace prutové soustavy je zobrazeno na Obr. 3.6. Výsledky napětově-deformační analýzy jsou umístěny v Tab. 3.

Číslo uzlů	x-ové souřadnice	y-ové souřadnice	Síly působí x-ové souřadnice	Síly působí y-ové souřadnice	Posuvy x-ové souřadnice	Posuvy y-ové souřadnice	Reakce x-ové souřadnice	Reakce y-ové souřadnice
[–]	[mm]	[mm]	[N]	[N]	[mm]	[mm]	[N]	[N]
1	0	0	0	0	0	0	0	13750
2	5000	0	0	-5000	0.1637	-1.1326	0	0
3	10000	0	0	-15000	0.3274	-1.6505	0	0
4	15000	0	0	-10000	0.5208	-1.3061	0	0
5	20000	0	0	0	0.7143	0	0	16250
6	0	5000	0	0	0.6101	0	0	0
7	5000	5000	0	0	0.6101	-1.0731	0	0
8	10000	5000	0	0	0.3423	-1.6505	0	0
9	15000	5000	0	0	0.0744	-1.1870	0	0
10	20000	5000	0	0	0.0744	0	0	0

Tab. 2. Výsledky primárního řešení



Obr. 4.8 Grafické znázornění deformované soustavy s vykreslením reakcí

Číslo uzlů	Uzel prvek začíná	Uzel prvek končí	Průřez	Posuv Δl_i	Napětí σ_i
[–]	[–]	[–]	[mm ²]	[mm]	[MPa]
1	1	2	2000	0.1637	6.8750
2	2	3	2000	0.1637	6.8750
3	3	4	2000	0.1935	8.1250
4	4	5	2000	0.1935	8.1250
5	1	6	2000	0	0
6	6	7	2000	0.0000	0
7	7	8	2000	-0.2679	-11.2500
8	8	9	2000	-0.2679	-11.2500
9	9	10	2000	0	0
10	10	5	2000	0	0
11	7	2	1000	0.1190	5.0000
12	8	3	1000	0	0
13	9	4	1000	0.2381	10.0000
14	1	7	1000	-0.6548	-19.4454
15	7	3	1000	0.4167	13.3744
16	3	9	1000	0.2976	8.8388
17	9	5	1000	-0.7738	-22.9810

Tab. 3. Výsledky řešení napětí a deformace elementu.

5. Závěr

Předkládaná diplomová práce se zabývá řešením rovinných příhradových konstrukcí. V úvodní kapitole (kapitol č.1) je popsán teorie příhradových konstrukcí. Následující kapitole (kapitol č. 2) se zabývá teorie metody konečných prvků. V úvodu kapitoly je uvedena historie. Dále je zde rozpracovaná teorii aplikace metodou konečných prvků pro prutové konstrukce. Ve třetí kapitole je proveden výpočet rovinné prutové konstrukce. Řešení je proveden jednak pomocí tzv. styčnickové metody a jednak pomocí autorova vlastního program, který využívá pro řešení právě metodou konečných prvků. Výsledky jsou shrnuty v tabulkách. Srovnání a porovnání výsledků analytického a numerického řešení ukazuje, že program je vytvořen správně a může být používán i pro jiné typy rovinných příhradových konstrukcí.

Požítá literatura:

[1] LENERT, J.: Pružnost a pevnost I, 1. vyd., VŠB-TU Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-392-3.

[2] LENERT, J. Pružnost a pevnost II. 1. vyd. dotisk Ostrava : VŠB-TU, 1998. 174 s. ISBN 80-7078-572-1

[3] LENERT, J. Úvod do metody konečných prvků. 1. vyd. Ostrava : VŠB-TU, 1999. 110 s. ISBN 80-7078-686-8

[4] A. J. M. Ferreira. MATLAB Codes for Finite Element Analysis. Universidade do Porto, Portugal 2009. 235p. ISBN 978-4020-9199-5

Internetové odkazy platné ke dni: 15. 5. 2009.

[S1] <http://www.mathworks.com/products/matlab/>

[S2] E-learningový kurs Statika na <http://www.337.vsb.cz/>

Přílohy.

Příloha č. 1. Soubor hlavní

```
% Hlavní soubor
clear all
clc
load node.txt
node
load element.txt
element
% pu počet uzly
disp('počet uzly')
pu = size(node,1)
% pp pocet prvky
disp('počet prvky')
pp = size(element,1)
% mu matice uzlů
disp('matice uzly')
mu=node(1:pu,2:3)
% mp matice prvků
disp('Matice prvku')
mp=element(1:pp,1:2)
% ma materialy
disp('matice materialy')
ma=[2.1e5 0.3]
%Průřez zadáno
disp('Průřez zadáno v mm2')
S=[1000; 2000]
% E modul pružnosti ,všechny prvky mají stejnou
disp('Modul pružnosti v MPa')
E=ma(:,1)*ones(pp,1)
% mi konstanta uměrnosti
disp('Konstanta uměrnosti')
mi=ma(:,2)
% Průřez prvků
disp('Průřez prvků v mm2')
prurez=hledatprurez(S,element,pp)
% Volím normy E modul pružnosti krat průřez prvků
Esnormy = 210000*S(2);
% E modul pružnosti krat průřez prvků
Es = diag(E)*prurez;
% xx poloha prvku v osy x
xx=mu(:,1);
% xx poloha prvku v osy y
yy=mu(:,2);
% pv pocet stupnu volnosti
pv=pu*2;
```

```

% sily v uzlu
    sily=zeros(pv,1);
% zadané sily
    sily(4)=-5000;
    sily(6)=-15000;
    sily(8)=-10000;
disp('sily v uzlu N')
    sily
% Globalni tuhosti matice
    [tuhost]=maticetuhosti(pv,pp,mp,pu,mu,xx,yy,Es,Esnormy);
% okp okrajove podminky, reakce musime hledat
    okp=[1,2,10]';
% Řešení posuvy uzly
    posuvy=reseniposuvy(pv,okp,tuhost,sily);
% Řešení reakce uzly
    reakce=resenireakce(pv,posuvy,tuhost,okp);
% Řešení napeti v prvku
    napeti=reseninapeti(pp,mp,xx,yy,posuvy,E,Esnormy,Es);
% graf
    graf(node,element,pu,pp,pv,xx,yy,mp,mu,posuvy,reakce,sily)

```

Příloha č. 2.

Soubor hledá průřez

```

%Průřez prvků
function prurez=hledatprurez(S,element,pp);
    real=element(1:pp,11);
    prurez=zeros(pp,1);
    for i=1:pp;
        indexsa1=[zeros(i-1,1);S(real(i));zeros(pp-i,1)];
        prurez=prurez+indexsa1;
    end

```

Příloha č. 3.

Soubor matice tuhosti

```

% Globalni tuhosti matice
function [tuhost]=maticetuhosti(pv,pp,mp,pu,mu,xx,yy,Es,Esnormy);
tuhost=zeros(pv);
for e=1:pp;
    index=mp(e,:);
    indexprvku=[ index(1)*2-1 index(1)*2 index(2)*2-1 index(2)*2];
    xa=xx(index(2))-xx(index(1));
    ya=yy(index(2))-yy(index(1));
    delkaprvku=sqrt(xa*xa+ya*ya);
    C=xa/delkaprvku;
    S=ya/delkaprvku;
    k1=Esnormy*([C*C C*S -C*C -C*S; C*S S*S -C*S -S*S;-C*C -C*S C*C C*S;-C*S -S*S C*S
S*S]*(Es(1))/Esnormy)/delkaprvku;
    tuhost(indexprvku,indexprvku)=tuhost(indexprvku,indexprvku)+k1;
end

```

Příloha č. 4.**Soubor hledá napětí**

```
function napeti=reseninapeti(pp,mp,xx,yy,posuvy,E,Esnormy,Es);
% Řešení napeti v prvku
for e=1:pp;
    index=mp(e,:);
    indexprvku=[ index(1)*2-1 index(1)*2 index(2)*2-1 index(2)*2];
    xa=xx(index(2))-xx(index(1));
    ya=yy(index(2))-yy(index(1));
    delkaprvku=sqrt(xa*xa+ya*ya);
    C=xa/delkaprvku;
    S=ya/delkaprvku;
    %delta l =delkaprvku*[-C -S C S]*posuvy(indexprvku)
    %sigma l =E/l*delta l
    sil(e)=Esnormy*[-C -S C S]*posuvy(indexprvku)/delkaprvku;
    napeti(e)=Esnormy*E(e)*[-C -S C S]*posuvy(indexprvku)/(delkaprvku*Es(e));
end
disp('Napeti P (MPa)');
jj=1:pp; format
[jj' napeti']
```

Příloha č. 5.**Soubor hledá posuvy**

```
function posuvy=reseniposuvy(pv,okp,tuhost,sily);
% Řešení posuvy prvku
    okp=setdiff([1:pv]',[okp]);
    U=tuhost(okp,okp)\sily(okp);
    posuvy=zeros(pv,1);
    posuvy(okp)=U;
disp('Posuvy uzly v mm');
jj=1:pv; format
[jj' posuvy]
a=sqrt(jj*jj+(jj+1)*(jj+1))
```

Příloha č. 6.**Soubor hledá reakce**

```
function reakce=resenireakce(pv,posuvy,tuhost,okp);
% Řešení uzly prvku
    reakce=zeros(pv,1);
    F=tuhost*posuvy;
    reakce(okp)=F(okp);
    disp('Reakce uzly v N');
jj=1:pv; format
[jj' reakce]
```

Příloha č. 7.

Graf

```

function graf(node,element,pu,pp,pv,xx,yy,mp,mu,posuvy,reakce,sily)
% xx poloha prvku v osy x
xx=mu(:,1);
% xx poloha prvku v osy y
yy=mu(:,2);
pocet = pp;
poceta=pu;
hold on
for k=1:pocet
    s=mp(k,:);
    xe(1)=xx(abs(s(1)));
    ye(1)=yy(abs(s(1)));
    xe(2)=xx(abs(s(2)));
    ye(2)=yy(abs(s(2)));
    plot(xe,ye)
end
nasobik =300;
for l=1:pocet
    d=mp(l,:);
    xp(1)=xx(abs(d(1)))+posuvy(abs(2*d(1)-1))*nasobik;
    yp(1)=yy(abs(d(1)))+posuvy(abs(2*d(1)))*nasobik;
    xp(2)=xx(abs(d(2)))+posuvy(abs(2*d(2)-1))*nasobik;
    yp(2)=yy(abs(d(2)))+posuvy(abs(2*d(2)))*nasobik;
    plot(xp,yp,'r')
end
nasob =0.07;
for j=1:poceta
    da=[j,j];
    yr(1)=yy(abs(da(1)));
    xr(1)=xx(abs(da(1)));
    xr(2)=xx(abs(da(2)))+reakce(abs(2*da(2)-1))*nasob;
    yr(2)=yy(abs(da(2)));
    plot(xr,yr,'b','LineWidth',5)
end
for j=1:poceta
    da=[j,j];
    yrs(1)=yy(abs(da(1)));
    xrs(1)=xx(abs(da(1)));
    xrs(2)=xx(abs(da(2)))+sily(abs(2*da(2)-1))*nasob;
    yrs(2)=yy(abs(da(2)));
    plot(xrs,yrs,'gr','LineWidth',5)
end
for k=1:poceta
    da=[k,k];
    yra(1)=yy(abs(da(1)));
    xra(1)=xx(abs(da(1)));
    xra(2)=xx(abs(da(2)));
    yra(2)=yy(abs(da(2)))+reakce(abs(2*da(2)))*nasob;
    plot(xra,yra,'r','LineWidth',5)

```

```

end
for k=1:poceta
    da=[k,k];
    yras(1)=yy(abs(da(1)));
    xras(1)=xx(abs(da(1)));
    xras(2)=xx(abs(da(2)));
    yras(2)=yy(abs(da(2)))+sily(abs(2*da(2)))*nasob;
plot(xras,yras,'k','LineWidth',5)
end
xxmin = min(xx); xxmax = max(xx); yymin = min(yy); ymax = max(yy);
axis([xxmin-1500 xxmax+1500 yymin-1500 ymax+1500])

```

Příloha č. 8.

Soubor „node.txt“

1	2	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	1
2	3	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	2
3	4	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	3
4	5	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	4
1	6	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	5
6	7	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	6
7	8	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	7
8	9	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	8
9	10	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	9
10	5	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	10
7	2	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	11
8	3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	12
9	4	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	13
1	7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	14
7	3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	15
3	9	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	16
9	5	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	17

% I, J, K, L, M, N, O, P, MAT, TYPE, REAL, SECNUM, ESYS, IEL

Příloha č. 9.

Soubor „element.txt“

1	0	0
2	5000.0000000000	0
3	10000.0000000000	0
4	15000.0000000000	0
5	20000.0000000000	0
6	0.00000000000000	5000.0000000000
7	5000.0000000000	5000.0000000000
8	10000.0000000000	5000.0000000000
9	15000.0000000000	5000.0000000000
10	20000.0000000000	5000.0000000000

Poděkování

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Ing. Fusek Martin, Ph.D. za velmi užitečnou, metodickou pomoc a cenné rady při zpracování bakalářské práce. Dále děkuji všem, kteří mi byli ochotni poskytnout významné rady při vytváření bakalářské práce.